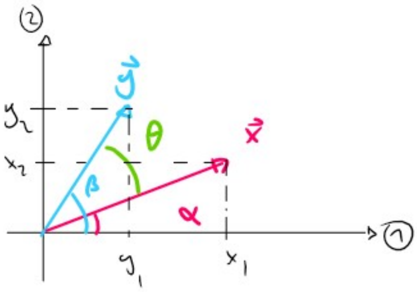
Moyenne semestre = ([note exam écrit] + [note TP])/2

Calcul des angles

Pour avoir une base de R^N il nous faut de N vecteurs qui forment une famille libre.



$$\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}$$

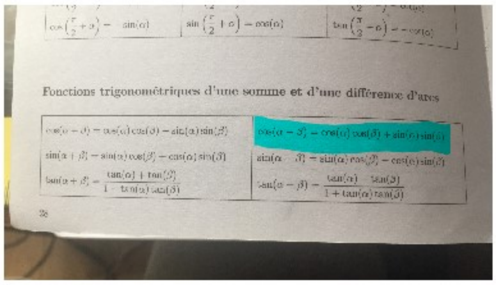
$$\cos(\beta) = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}$$

$$\sin(\beta) = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}$$

$$\cos(\theta) = \cos(\beta - \alpha) =$$

table CRM.
p. 28



$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = $ [illegible]

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

28

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{y_1}{\|\vec{y}\|} + \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{y_2}{\|\vec{y}\|} = \boxed{\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} = \cos(\theta)}$$

Nouvel opérateur ***PRODUIT SCALAIRE :***
Soient deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^N$ on définit leur produit scalaire comme

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1\cdot y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

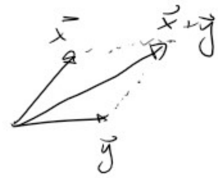
autre notation
$(\vec{x}\cdot\vec{y})$

Donc, on peut récrire que

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{u}\|}}$$

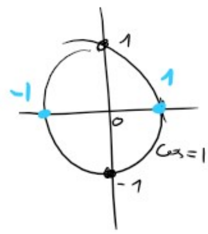
Donc, on peut récrire que $$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Nom	Notation		
Add. De vecteurs	$+ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$	$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{pmatrix}$	Appliquer la règle du parallélogramme
Multiplic. Par un scalaire	$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$	$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_N \end{pmatrix}$	Allonge, rétrécit ou inverse un vecteur
Produit scalaire	$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$	$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i$	Indicateur sur l'angle entre les vecteurs



Supposons que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ que vaut $\cos(\theta)$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

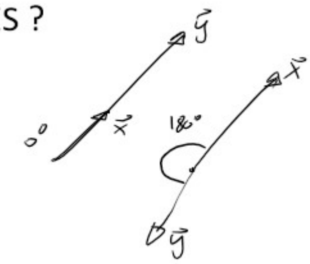


$\Rightarrow$ $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont ORTHOGONAUX (perpendiculaires)
à angle droit

Pour vérifier si 2 vecteurs sont à angle droit, il suffit de vérifier si leur produit scalaire = 0 !!!

Que se passe-t-il si les deux vecteurs sont COLINÉAIRES ?

$\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$



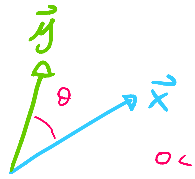
$$\cos(\theta) = \pm 1 = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Si deux vecteurs sont colinéaires, alors

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \pm \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

S'il y angle "quelconque" entre les deux vecteurs

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta)$$

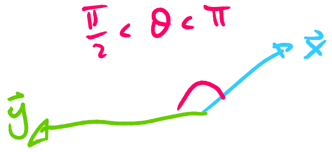


$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Angle aigüe

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in (0, 1)$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



Angle obtus

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ plus petit que 0 (négatif)

Calcul de l'angle entre vecteurs : c.f. série 13...

Corrigé 13.2: preuve par SI ET SEULEMENT SI

$(A) \Leftrightarrow (B)$ $\quad (\|\vec{x}\| > 0$ et $\|\vec{y}\| > 0)$

$\boxed{\vec{x}, \vec{y} \text{ colinéaires}}$ $\quad \boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \pm \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$

$(A) \Rightarrow (B)$: $\vec{x}$ et $\vec{y}$ colinéaires $\Rightarrow$ même direction $\Rightarrow$ angle θ est $0°$ ou $180°$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \pm 1 \overset{\text{déf}}{=} \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\pm \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{(B)}$$ preuve $(A) \Rightarrow (B)$

$(B) \Rightarrow (A)$

$(A) \Leftarrow (B)$:

$$\pm 1 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Rightarrow \pm 1 = \underbrace{\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}}_{\cos}$$

$\pm \Delta = \square \overset{\div \Delta}{\Rightarrow} \frac{\pm \Delta}{\Delta} = \frac{\square}{\Delta} \Rightarrow \pm 1 = \frac{\square}{\Delta}$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0°$ ou $\theta = 180°$ $\Rightarrow$ de même direct...

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\cos}$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0°$ ou $\theta = 180° \Rightarrow$ de même direction

$\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ sont COLINEAIRES (R) $\Rightarrow$ (A).

CQFD!

13.3 : $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$

déf   déf

$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_1 + x_2 x_2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2$

$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$